Výpočet transformačních koeficinetů vybraných 2D transformací

Jan Ježek

červen 2008

Obsah

1 Odvození transformačního klíče vybraných 2D transformací

Cílem této části je podrobně popsat všechny implementované postupy výpočtu transformačních koeficientů. Popsán bude jak obecný postup vyrovnání, tak konkrétní tvary matic pro jednotlivé transformační metody.

1.1 Metody vyrovnání

Pro jednoznačné určení transformačního klíče z nadbytečného počtu identických bodů byla použita metoda nejmenších čtverců. Tato metoda byla aplikovaná na vzdálenost (v rovinně) mezi cílovými a přetransformovanými výchozími body.

V následujícím textu budou popsány vzorce, které byly použité pro jednotlivá vyrovnání metodou zprostředkujících pozorovaní. Dále bude také zmíněn složitější případ vyrovnaní metodu zprostředkujících s podmínkami.

Pro další rovnice použijeme toto označení:

$\mathbf{x}$	$=$	$(x_1 \dots x_k)^T$	vektor hledaných veličin
$\mathbf{x_0}$	$=$	$(x_{10} \dots x_{k0})^T$	vektor přibližných hodnot neznámých
$d\mathbf{x}$	$=$	$(dx_1 \dots dx_k)^T$	vektor přírůstků přibližných hodnot
$F_i(\mathbf{x})$			funkční vztah mezi hledanými $\mathbf{x}$ a měřenými veličinami (v našem případě transformační rovnice)
l_i			naměřená zprostředkující veličina
v_i			oprava naměřené zprostředkující veličina
$\bar{f}_i$			vyrovná hodnota zprostředkující veličiny
i			index i-té zprostředkující rovnice

Pak platí:

$$F_i(\mathbf{x}) = \bar{f}_i$$

$$F_i(x_1 \dots x_k) = l_i + v_i$$

$$F_i(x_{10} + dx_1 \dots x_{k0} + dx_k) = l_i + v_i$$

Levou stranu rozvedeme do Taylerova rozvoje [1]:

$$F_i(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{F_i}{dx_1}\right) dx_1 + \ldots + \left(\frac{F_i}{dx_k}\right) dx_k = l_i + v_i$$

Po úpravě dostáváme:

$$a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \ldots + a_{ik}dx_k + F_i(\mathbf{x_0}) - l_i = v_i, \tag{1}$$

kde $i = 1, \ldots, n$ a n je počet linearizovaných zprostředkujících rovnic oprav a k je počet hledaných neznámých. Výraz $F_i(\mathbf{x_0}) - l_i = L_i$ je tzv. absolutní člen.

[1] Pro případ, kdy zavedeme vhodnou substituci a např. jako transformační koeficienty nevolíme přímo geometrické parametry, není použití Taylerova rozvoje nutné. V případě, kdy potřebujeme, ale zavést podmínky přímo pro geometrické koeficienty (např, stočení rovno nule, nebo shodná změna měřítek pro obě osy apod..) Tylerovo rozvoj musíme použí.

Výraz (1) můžeme zapsat maticově takto:

$$\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L} = \mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_k \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x_0}) - \mathbf{l_1} \\ F_2(\mathbf{x_0}) - \mathbf{l_2} \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x_0}) - \mathbf{l_n} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Po aplikace metody nejmenších čtverců (odvození viz [1]) získáváme pro vyrovnané neznámé vztah:

$$d\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{L}) \tag{4}$$

Tento způsob byl implementován pro výpočet podobností, afinní a projektivní transformace, přičemž konkrétní matice jsou uvedeny v následujících kapitolách. Pro případ, kdy chceme zavést podmínky pro neznám0 je výpočet následující:

Podmínky pro opravy neznámých definujeme pomocí obecného vyjádření:

$$\begin{aligned} b_{11}v_1 + \dots \quad &+ b_{1n}v_n + U_1 = 0 \\ &\vdots \\ b_{r1}v_1 + \dots \quad &+ b_{rn}v_n + U_r = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

kde U_i jsou hodnoty uzávěrů - tzn. rozdíl mezi hodnotou vypočítanou z přibližných hodnot a hodnotou požadovanou, která je stanovena podmínkou. Koeficienty označené jako b_{ii} tvoří pak matici **B**. Můžeme tedy psát:

$$\mathbf{Bv} + \mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Pro společné vyrovnání zprostředkujících měření s podmínkami pak dostáváme (odvození viz [1]):

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A^TA} & \mathbf{B^T} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A^TL} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} \tag{7}$$

1.2 Obecné vyjádření lineárních 2D transformací

V této části se budeme zabývat implementovanou skupinou lineárních 2D transformací a především způsobem výpočtu transformačního klíče z nadbytečného počtu identických bodů. Popsány budou:

- Podobnostní transformace
- Afinní transformace
- Projektivní transformace
- Afinní transformace s podmínkami
- Speciální případ afinní transformace

Obecný výraz pro všechny tyto metody lze napsat pomocí obecného maticového vyjádření $\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x}$, kde

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} qx' \\ qy' \\ q \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} & p_{20} \\ p_{01} & p_{11} & p_{12} \\ p_{02} & p_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

přičemž x', y' jsou souřadnice v cílové soustavě, x, y ve výchozí, p_{nn} jsou transformační koeficienty a q je pomocný parametr.

V následujících odstavcích budou uvedeny vztahy pro výpočet transformačních koeficientů na základě známých identických bodů pomocí MNČ. Ačkoliv je toto odvození poměrně jednoduché, uvádíme jej zde především z důvodu dokumentace implementovaných algoritmů. Cílem je také vytvořit jednotný soupis všech vztahů pro tyto metody.

Pro konečný výpočet koeficientů lze použít algoritmus vyrovnání zprostředkujících měření (viz část 1.1). Cílem následujících sekcí je tedy především popsat tvar matic $\mathbf{A}$, $d\mathbf{x}$ a $\mathbf{L}$. Pro konečný transformačních parametrů pak stačí použít vzorec (4).

1.3 Podobnostní transformace

Podobnostní transformaci lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jelikož se jedná o lineární vztah, lze jako přibližné hodnoty neznámých zvolit $\mathbf{x_0} = (0, 0, 0, 0)^T$ a tedy platí i $0 + dx_i = x_i \rightarrow x_i = dx_i$ Neznámými jsou transformační koeficienty. Nechť tedy matice $\mathbf{dx}$ má tvar:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Potom matice $\mathbf{A}$ má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ & \vdots & & \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ & \vdots & & \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Vzhledem k volbě nulových přibližných hodnot můžeme psát $F_i(x_0) = 0$ a tedy (dle 3) matice **L** mátvar: [1]

$$\mathbf{L} = - \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Použitím vztahu (4) dostáváme tak přímo vyrovnané neznámé bez nutnosti další iterace. Důvodem je lineární vztah mezi neznámými a měřenými veličinami.

1.4 Afinní transformace

Afinní transformaci lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Na základě obdobné volby neznámých jako v 1.3 můžeme psát tvar matice $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Potom matice **A** má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_1 & 1 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_n & x_n & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Matice **L** je pak shodná jako u podobností transformace viz vztah 9. Použitím vztahu 4 dostáváme tak přímo vyrovnané neznámé.

Pro optimalizaci výpočtu lze matici **A** zjednodušit a počítat neznáme a, b, c a d, e, f odděleně. Matice **A** má pak tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ & & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

přičemž dílčí matice neznámých jsou:

$$d\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, d\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

[1] V implementaci tohoto způsobu bylo znaménko matice L vytknuta a uplatněno až ve vztahu 4.

a dále matice $\mathbf{L}$ lze rozdělit takto:

$$\mathbf{L_1} = -\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \mathbf{L_2} = -\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

1.5 Afinní transformace s podmínkami

Jednou z často používaných forem afinní transformace je varianta, kdy parametr zkosení je roven nule. Tento způsob se často využívá právě při referencování satelitních snímků apod. Obecně lze tuto úlohu řešit buď přímým vyloučením tohoto parametru, nebo použitím vyrovnání zprostředkujících měření s podmínkami. V následujících odstavcích bude popsáno odvození vyrovnání včetně podmínek, tak jak bylo implementováno. Výhodou je obecný přístup k řešení daného problému. Výsledek pak umožňuje definovat jakékoliv jiné podmínky bez zásahu do kódu.

Pro určení transformačních koeficientů je poučit obecný algoritmus vyrovnání zprostředkujících měření s podmínkami dle [1].

Jelikož je nutné pracovat přímo s geometrickou formou transformačních parametrů je výchozí vztah afinní transformace tento:

$$\begin{array}{ccccccc} x' & = & S_x \cos\alpha_x & - & S_y \sin\alpha_y & + & T_x \\ y' & = & S_x \sin\alpha_x & + & S_y \cos\alpha_y & + & T_y \end{array} \tag{12}$$

kde x', y' jsou cílové souřadnice, x, x jsou výchozí souřadnice. Další označení je:

S_x	měřítko ve směru osy X,
S_y	měřítko ve směru osy Y,
α_x	úhel rotace pro osu x,
α_y	úhel rotace pro osu y,
T_x	posun ve směru osy X,
T_y	posun ve směru osy Y.

Parametr q vyjadřující zkosení je potom $q = \alpha_x - \alpha_y$

Pro další postup vyrovnání byla matice $\mathbf{dx}$ neznámých zvolena takto:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ dT_x \\ dT_y \end{pmatrix} \tag{13}$$

Na základě této volby byla odvozena matice $\mathbf{A}$. Jednotlivé derivace potom jsou ($i = 1, \ldots, n$ je počet identických bodů):

$$\begin{array}{ccl} \left(\frac{dx}{S_x}\right)_i & = & \cos\alpha_x x_i \\ \left(\frac{dx}{S_y}\right)_i & = & -\sin\alpha_y y_i \\ \left(\frac{dx}{\alpha_x}\right)_i & = & -S_x \sin\alpha_x x_i \\ \left(\frac{dx}{\alpha_y}\right)_i & = & -S_y \cos\alpha_y y_i \\ \left(\frac{dx}{T_x}\right)_i & = & 1 \\ \left(\frac{dx}{T_y}\right)_i & = & 0 \end{array} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dy}{S_x}\right)_i &= \sin\alpha_x x_i \\
\left(\frac{dy}{S_y}\right)_i &= \cos\alpha_y y_i \\
\left(\frac{dy}{\alpha_x}\right)_i &= S_x\cos\alpha_x x_i \\
\left(\frac{dy}{\alpha_y}\right)_i &= -S_y\sin\alpha_y y_i \\
\left(\frac{dy}{T_x}\right)_i &= 0 \\
\left(\frac{dy}{T_y}\right)_i &= 1
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Matice **A** má tedy tvar:

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
\left(\frac{dx}{S_x}\right)_1 & \left(\frac{dx}{S_y}\right)_1 & \left(\frac{dx}{\alpha_x}\right)_1 & \left(\frac{dx}{\alpha_y}\right)_1 & \left(\frac{dx}{T_x}\right)_1 & \left(\frac{dx}{T_y}\right)_1 \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\left(\frac{dx}{S_x}\right)_n & \left(\frac{dx}{S_y}\right)_n & \left(\frac{dx}{\alpha_x}\right)_n & \left(\frac{dx}{\alpha_y}\right)_n & \left(\frac{dx}{T_x}\right)_n & \left(\frac{dx}{T_y}\right)_n \\
\left(\frac{dy}{S_x}\right)_1 & \left(\frac{dy}{S_y}\right)_1 & \left(\frac{dy}{\alpha_x}\right)_1 & \left(\frac{dy}{\alpha_y}\right)_1 & \left(\frac{dy}{T_x}\right)_1 & \left(\frac{dy}{T_y}\right)_1 \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\left(\frac{dy}{S_x}\right)_n & \left(\frac{dy}{S_y}\right)_n & \left(\frac{dy}{\alpha_x}\right)_n & \left(\frac{dy}{\alpha_y}\right)_n & \left(\frac{dy}{T_x}\right)_n & \left(\frac{dy}{T_y}\right)_n
\end{pmatrix}
\tag{16}
$$

Zbývá ještě naplnit matici **L**. Dle vztahů (3) a (12) můžeme psát:

$$
\mathbf{L} = \begin{pmatrix}
fx(\mathbf{x_0}) - x'_1 \\
\vdots \\
fx(\mathbf{x_0}) - x'_n \\
fy(\mathbf{x_0}) - y'_1 \\
\vdots \\
fy(\mathbf{x_0}) - y'_n
\end{pmatrix},
\tag{17}
$$

kde $\mathbf{x_0}$ je vektor přibližných hodnot neznámých.

Pro zařazení podmínek do vyrovnání je ještě nutné určit tvar matice **B** a **U**. Chceme-li např. definovat podmínku, že parametr zkosení q má být roven (tzn. musí platit $\alpha_x - \alpha_y = 0$) bude rovnice (6) mít tento tvar:

$$v_\alpha x + (-q_0) = 0$$

Matice **B** bude mít pak tvar (vzhledem ke vztahu (13)):

$$\mathbf{B} = (0, 0, -1, 1, 0, 0)$$

Chceme-li aby parametr zkosení q měl po vyrovnání hodnotu $q = 0$ bude matice **U** mít tvar:

$$\mathbf{U} = (\alpha x_0 - \alpha y_0)\ ,$$

kde q_0 je přibližná hodnota parametru q. Výsledné opravy pak dostaneme pomocí vzorce (7). Máme-li k dispozici odpovídající přibližné hodnoty můžeme opravy počítat iterativně. Přibližné hodnoty lze získat např. výpočtem afinní transformace bez podmínek jak je popsáno v části 1.4.

1.6 Projektivní transformace

Projektivní transformaci lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$\begin{pmatrix} mx' \\ my' \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vzhledem k lineární formě vztahů můžeme opět zvolit:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

Potom matice **A** má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'x & -x'y \\ & & & \vdots & & & & \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'x & -x'y \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x'x & -x'y \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x'x & -x'y \end{pmatrix} \tag{18}$$

Matice **L** je pak shodná jako u podobností transformace viz vztah (9). Použitím vztahu (4) dostáváme tak opět přímo vyrovnané neznámé.

1.7 Speciální případy afinní transformace

V této části bude popsáno odvození transformace pří které dochází ke změně měřítek v obou směrech a k posunu. Na rozdíl od afinní transformace tedy není uplatněni zkosení a rotace.

Použijeme-li ve vztahu (12) nulové koeficienty pro stočení získáme transformační rovnici ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nechť tedy matice neznámých **dx** má tvar:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Potom matice **A** má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \\ x_n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & y_n & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Výsledný postup výpočtu neznámých je shodný s výpočtem afinní transformace. Použitím vztahu (4) dostáváme opět přímo vyrovnané neznámé. Pro optimalizaci výpočtu je možné matici **A** opět rozdělit a počítat koeficienty odděleně. Na rozdíl od afinní transformace však nedostaneme pro obě skupiny koeficientů stejnou matici **A**.

Reference

[1] Kabeláč, J.: *Geodetické metody vyrovnání metoda nejmenších čtverců.* Skriptum Fakulty Aplikovaných Věd Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni 2003, ISBN 80-7043-260-8.